

Etude du Couplage des Modes dans une Structure Bicouche Aluminium/Epoxy

C. Gauthier, D. Leduc, M Ech-Cherif El-Kettani, Jocelyne Galy, M Predoi, J.-L Izbicki

▶ To cite this version:

C. Gauthier, D. Leduc, M Ech-Cherif El-Kettani, Jocelyne Galy, M Predoi, et al.. Etude du Couplage des Modes dans une Structure Bicouche Aluminium/Epoxy. CFA/VISHNO2016, Apr 2016, Le Mans, France. hal-01951881

HAL Id: hal-01951881 https://normandie-univ.hal.science/hal-01951881

Submitted on 11 Dec 2018

HAL is a multi-disciplinary open access archive for the deposit and dissemination of scientific research documents, whether they are published or not. The documents may come from teaching and research institutions in France or abroad, or from public or private research centers.

L'archive ouverte pluridisciplinaire **HAL**, est destinée au dépôt et à la diffusion de documents scientifiques de niveau recherche, publiés ou non, émanant des établissements d'enseignement et de recherche français ou étrangers, des laboratoires publics ou privés.

CFA 2016 / VISHNO 11-15 avril 2016, Le Mans

CFA/VISHNO 2016

Etude du Couplage des Modes dans une Structure Bicouche Aluminium/Epoxy

C. Gauthier^{a,b}, D. Leduc^a, M. Ech-Cherif El-Kettani^a, J. Galy^b, M. Predoi^c et J.-L. Izbicki^a

^aLOMC UMR CNRS 6294, 75 rue Bellot, 76600 Le Havre, France

^bIMP, 17 avenue Jean Capelle, 69621 Villeurbanne, France

^cUniversité Polytechnique de Bucarest, Splaiul Independenței 313, 060042 Bucarest,

Roumanie

camille.gauthier@etu.univ-lehavre.fr



11-15 avril 2016, Le Mans CFA 2016 / VISHNO

Les modes propagatifs dans une structure bicouche résultent de vibrations dans chacune des couches et des conditions de contact à l'interface. Les modes les plus sensibles aux conditions de contact sont les modes qui peuvent servir à apprécier le niveau d'adhésion entre les deux couches. On modélise ici le contact par un modèle de Jones. Une étude paramétrique, en fonction des constantes de raideur de Jones est réalisée afin de trouver les modes candidats à qualifier le niveau d'adhésion. Deux méthodes sont conjointement utilisées : une mettant en jeu les éléments finis, permettant d'avoir l'ensemble des courbes de dispersion pour un temps de calcul limité, et une méthode analytique permettant le suivi d'un mode. Un échantillon bicouche a été réalisé avec des conditions physico chimiques particulières afin d'obtenir un niveaux d'adhésion dit faible. L'étude expérimentale est basée sur l'excitation des modes sensibles et permet de valider la qualification d'un niveau d'adhésion faible.

1 Introduction

Le collage structural est de plus en plus utilisé dans l'industrie en particulier dans le domaine du transport. En effet, il permet l'assemblage de tous types de matériaux tout en ayant des structures plus légères et plus solides. Il est donc nécessaire de développer des méthodes de contrôle non destructives de l'adhésion. Bien que ce soit une problématique à laquelle on s'intéresse actuellement [1], il n'existe pas de méthode générale capable d'évaluer le niveau d'adhésion. Si la physico-chimie de la colle est bien connue, l'impact d'un changement de ces propriétés sur la réponse acoustique est encore un sujet d'étude. Ainsi, pour évaluer un niveau d'adhésion, des contrôles destructifs sont toujours réalisés sur des éprouvettes suiveuses fabriquées lors de la production et testées par différents essais mécaniques.

Le but de ce projet est donc de caractériser différents niveaux d'adhésion en jouant sur plusieurs paramètres chimiques et de les quantifier acoustiquement. Après avoir étudié la réticulation d'une plaque d'époxy [2], la seconde étape est la discrimination et la qualification de niveaux d'adhésion sur une structure bicouche aluminium/époxy par ondes guidées de type Lamb.

Ce papier correspond à un travail amont de cette étude en analysant le cas du couplage des modes dans cette structure. Dans la première partie sont tracées les courbes de dispersion des ondes de Lamb dans le cas d'une adhésion parfaite par deux méthodes. Dans la deuxième partie est présenté le modèle de Jones. Une étude de sensibilité est ensuite menée sur les fréquences de coupure et sur les courbes de dispersion. Enfin, une étude expérimentale est effectuée.

2 Courbes de dispersion : adhésion parfaite

Le cas d'une structure en adhésion parfaite est tout d'abord étudié car il s'agit du cas de référence. L'étude peut se faire grâce à une résolution analytique qui permet d'obtenir les courbes de dispersion mode à mode, mais également par résolution par éléments finis (Finite Element Method : FEM) qui permet d'obtenir un réseau de courbes pour un temps de calcul relativement limité.

2.1 Résolution analytique

On considère une structure bicouche (Figure 1) composée d'une plaque d'aluminium (milieu 1) revêtu d'une couche d'époxy (milieu 2). Les conditions aux limites sont des conditions de surfaces libres aux interfaces $z=-2h_1$ et $z=2h_2$ soit :

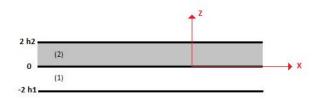


Figure 1 – Position du problème.

$$\begin{cases} \sigma_{xz}^{(2)}(z=2h_2) = 0\\ \sigma_{zz}^{(2)}(z=2h_2) = 0\\ \sigma_{xz}^{(2)}(z=-2h_1) = 0\\ \sigma_{xz}^{(2)}(z=-2h_1) = 0 \end{cases}$$
(1)

et des conditions de contact parfait en z = 0, c'est-à-dire une continuité des contraintes et des déplacements, données par :

$$\begin{cases} u_x^{(1)}(z=0) = u_x^{(2)}(z=0) \\ u_x^{(1)}(z=0) = u_x^{(2)}(z=0) \\ \sigma_{zz}^{(1)}(z=0) = \sigma_{zz}^{(2)}(z=0) \\ \sigma_{xz}^{(1)}(z=0) = \sigma_{xz}^{(2)}(z=0) \end{cases}$$
(2)

Tableau 1 – Paramètres des matériaux.

Matériaux	$c_L(m/s)$	$c_T(m/s)$	$\rho(kg/m^3)$	2h(mm)
Aluminium	6380	3100	2800	5
Epoxy	2512	1120	1100	0.5

Ces conditions conduisent à un système linéaire homogène de 8 équations à 8 inconnues, dont les zéros du déterminant correspondent aux modes guidés de la structure [3]. La résolution des équations (1) et (2) est faite à l'aide de l'algorithme de Newton-Raphson, connaissant au préalable les constantes physiques caractéristiques des deux structures reportées dans le tableau 1. Cette méthode permet de suivre les solutions correspondant à un mode donné. La résolution de ces équations permet de déterminer les nombres d'onde en fonction de la fréquence. Les courbes de dispersion es ondes de Lamb obtenues sont ainsi tracées sur la figure 2. Dans la mesure où les modes sont ceux de la structure bicouche, on renomme les modes par leur ordre d'apparition. L'exposant 0 correspond à un cas d'adhésion parfaite c'est-à-dire les valeurs de référence.

Les courbes de dispersion d'une plaque d'aluminium ont également été tracées afin d'observer l'apport de la couche de colle. On peut ainsi observer que même si certains CFA 2016 / VISHNO 11-15 avril 2016, Le Mans

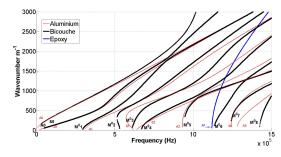


Figure 2 – Courbes de dispersion d'une structure bicouche superposées aux courbes de dispersion de l'aluminium et de celle de l'époxy.

modes de la bicouche restent très proche de ceux d'une plaque d'aluminium, tous sont modifiés en hautes et/ou basses fréquences. En effet, aux niveaux des fréquences de coupure, on retrouve des courbes semblables pour A_1 et M_1^0 ou bien S_2 et M_4^0 mais pour des fréquences plus élevées, les courbes du bicouche bifurqueront pour atteindre le mode d'aluminium précédent. De plus, on peut remarquer qu'il existe deux modes qui sont proches de S_1 : M_2^0 et M_3^0 l'un des deux est donc apparu, conséquence du couplage des deux structures élastiques.

on peut aussi remarquer que, dans le cas d'une structure bicouche, il n'y pas de croisement de modes : les courbes se rapprochent mais ne se coupent jamais. Ceci peut être expliqué par le fait que dans le cas d'une plaque, la résolution se fait à l'aide de deux matrices indépendantes donnant respectivement les modes symétriques et antisymétriques. Cependant, dans le cas d'une bicouche, il n'y a pas de factorisation possible des termes de la matrice qui traduit ainsi le couplage des matériaux.

Enfin, les deux premiers modes semblent tout d'abord tendre vers une valeur c_x environ égale à 2800m/s soit la vitesse de l'onde de Rayleigh dans l'aluminium. Cependant, en augmentant les plages de fréquence et de nombre d'onde, on peut remarquer que les modes d'ordre 0 bifurquent pour tendre vers une autre valeur $c_{R_{epoxy}} = 1000m/s$ ce qui correspond à la vitesse de l'onde de Rayleigh dans l'époxy, comme attendu au vu de la géométrie de la structure c'est-à-dire une interface vide/aluminium et une interface vide/époxy. Les deux premiers modes sont donc des modes propagatifs sans fréquences de coupure que l'on nommera A_0 et S_0 .

2.2 Résolution par FEM

Le cas d'une adhésion parfaite peut également être résolu à l'aide d'un logiciel d'élément finis (Comsol). Il s'agit cette fois d'une résolution aux valeurs propres, qui nous permet non pas de suivre un mode, mais d'obtenir un nuage de points décrivant l'ensemble des modes de vibration de cette structure. Afin de valider ce modèle, les courbes obtenues par résolution analytique et par modélisation ont été tracées sur la figure 4 (cf paragraphe suivant). La superposition des courbes valide les paramètres du modèle.

3 Modèle rhéologique de Jones

Le changement de propriétés physico-chimiques de la colle va influencer au niveau nanoscopique les interactions au voisinage de l'interface. D'un point de vue mésoscopique, qui est celui de l'acoustique ultrasonore, ceci doit se traduire par une ré-écriture des conditions d'interface. C'est le modèle de Jones [4, 5] qui va être utilisé. Il s'agit d'un modèle rhéologique utilisant deux constantes, dites paramètres de Jones. Il permet de modéliser l'interface avec une répartition surfacique de ressorts travaillant en traction/compression et en cisaillement représentée sur la figure 3 [6, 7].

Les conditions aux interfaces sont celles données par Jones et Whittier [8] :

$$\begin{cases} \sigma_{xz1} = \sigma_{xz2} = R_T [u_x] \\ \sigma_{zz1} = \sigma_{zz2} = R_L [u_z] \end{cases}$$
 (3)

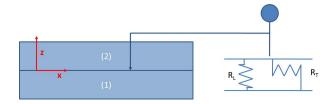


Figure 3 – Modèle rhéologique de Jones.

Dans le cas d'un collage parfait, la valeur des raideurs des ressorts R_L et R_T correspond à des valeurs infinies pour ces deux constantes et en cas de délaminage à des valeurs nulles. D'un point de vue numérique, une adhésion parfaite correspond à des valeurs supérieures ou égales à 10^{16} [9].

Une validation de la programmation sous Comsol a été réalisée en superposant les courbes obtenues par la recherche des zéros du déterminant obtenu (cf paragraphe 2.1) avec les résultats obtenus numériquement (Fig 4).

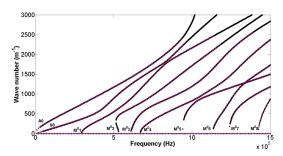


FIGURE 4 – Validation des paramètres du modèle de Jones (résolution analytique, \triangleleft adhésion parfaite par FEM, \bullet modèle de Jones par FEM à $\log(R_{L,T}) = 16$).

4 Étude de sensibilité des modes

Afin de trouver les meilleurs modes candidats pour qualifier le niveau d'adhésion, une étude paramétrique est effectuée portant sur la valeur des raideurs des ressorts. La première est réalisée sur les fréquences de coupure des modes en utilisant la méthode analytique et la seconde met en jeu les éléments finis et permet d'obtenir l'ensemble des courbes de dispersion.

4.1 Étude des fréquences de coupure en fonction des constantes de raideur

Dans le cas où le nombre d'onde est nul, c'est-à-dire aux fréquences de coupure, la matrice (8x8), obtenue par les

11-15 avril 2016, Le Mans CFA 2016 / VISHNO

équations (1) et (3), peut se découpler en deux sous-matrices dépendant chacune respectivement de R_L et de R_T .

$$det(M_L) = 0 (4)$$

donne les fréquences de coupure dépendant de R_L (Figure 5, a) et

$$det(M_T) = 0 (5)$$

donne celles dépendant de R_T (Figure 5, b). Les deux sous-matrices M_L et M_T sont présentées en annexe.

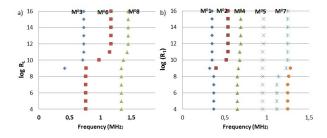


FIGURE 5 – Évolution des fréquences de coupure données par les deux matrices dépendant respectivement de a) R_L et de b) R_T .

La figure 5 donne ainsi l'évolution des fréquences de coupures en fonction du logarithme de R_L et de R_T . Pour $pR_{L,T}$ = 16, les fréquences de coupure sont celles d'une structure bicouche en adhésion parfaite et ce jusqu'à une valeur de $pR_{L,T} = 12$. A partir de cette valeur, on observe un décalage des fréquences de coupure. Enfin, à partir de $pR_{L,T} = 7$, si on récupère toutes les valeurs données par les deux matrices, on obtient des fréquences de coupure qui sont celles d'une simple plaque d'aluminium de 5mm d'épaisseur et celle d'une plaque d'époxy de 0.5mm d'épaisseur dans cette gamme de fréquence. On retrouve donc un phénomène de délaminage total à partir d'une valeur logarithmique de ressort d'environ 7. Afin de mieux observer ce phénomène de découplage, un zoom a été réalisé (Figure 6). Les fréquences de coupure recherchées sont des valeurs réelles positives. Or dans le cas de M_1 , on ne trouve plus de racine réelle positive, à partir de $log(R_T) = 8$.

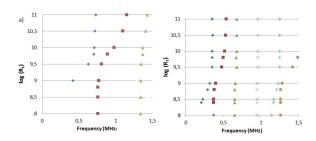


Figure 6 – Zoom sur la gamme de valeurs de R_L et R_T au niveau du phénomène de découplage.

Ainsi dans le cas d'une évaluation de l'adhésion, les modes M_2 , M_3 et M_6 semblent de bons candidats à qualifier ce phénomène.

4.2 Ondes guidées

Bien que les fréquences de coupure ne soient pas modifiées pour des valeurs de constantes de raideur de ressorts inférieures ou égales à $10^{11} Pa/m$, il est nécessaire

d'observer la sensibilité des ondes guidées à ces valeurs. La figure 7 montre les courbes de dispersion dans le cas d'une adhésion parfaite superposées à celles obtenus dans le cas où les constantes de raideur des ressorts valent $R_L = R_T = 10^{12} Pa/m$ noté $R_{L,T} = 10^{12} P/m$ ou dans le cas de valeur logarithmiques $pR_{L,T}$. Ainsi, on peut observer l'évolution globale des courbes de dispersion qui, lorsqu'on diminue la valeur des raideurs des ressorts, tendent vers les courbes de l'aluminium et de celles de l'époxy. Cette évolution a lieu aussi bien en hautes que basses fréquences et s'applique à tous les modes même si certains sont plus sensibles que d'autres. Par exemple, les modes A_0 et S_0 seront modifiés en hautes fréquences et ne tendront plus que vers la vitesse de l'onde de Rayleigh de l'aluminium $c_{R_{Alumininium}} = 2800m/s$.

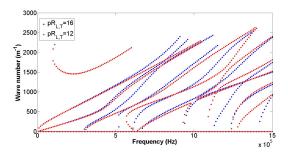


FIGURE 7 – Courbes de dispersion dans le cas d'une adhésion parfaite et pour $log(R_{L,T}) = 12$.

De plus, pour des fréquences d'environ 1MHz (Fig. 8), et des valeurs de nombres d'ondes d'environ $k_x = 800m^{-1}$, il existe une zone de rapprochement entre les modes M_4 et M_5 , qui se trouve être la zone de croisement entre A_2 et S_2 de l'aluminium. Quelle que soit la valeur des raideurs des ressorts (ici de $\log(R_{L,T}) = 16$ à $\log(R_{L,T}) = 10$). Cette zone de rapprochement est toujours présente et est donc peu sensible à la variation des raideurs des ressorts. Cependant, à $f = 1.3 \mathrm{MHz}$ et aux environs de $k_x = 1000m^{-1}$, ces mêmes modes sont nettement plus sensibles. De même, le mode M_3 aux environs de $k_x = 1700m^{-1}$ est sensible à la variation des valeurs de raideur des ressorts alors qu'à environ $f = 1 \mathrm{MHz}$ très peu.

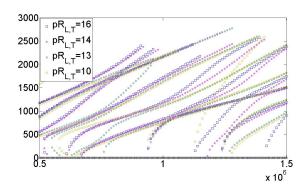


Figure 8 – Zoom des courbes de dispersion pour plusieurs valeurs de $R_{L,T}$.

Ainsi, nous avons examiné la sensibilité des ondes guidées aux variations des valeurs de $R_{L,T}$. Nous avons vu que tous les modes étaient sensibles à la variation de $R_{L,T}$. Cependant pour un même mode, il peut être sensible dans une certaine plage de fréquence et pas du tout ou très peu dans une autre. Donc, l'étude expérimentale se fera en

CFA 2016 / VISHNO 11-15 avril 2016, Le Mans

excitation impulsionnelle afin d'exciter un maximum de modes dans une gamme de fréquence la plus large possible.

5 Étude expérimentale

On cherche donc à caractériser l'adhésion dans le cadre du modèle de Jones. Un échantillon bicouche a été réalisé de dimension 200 * 200mm². Il s'agit d'une plaque d'aluminium revêtue d'une couche d'époxy à l'aide d'un bar coater qui assure le dépot d'une couche de même épaisseur. La préparation de l'époxy se fait à l'aide d'un réacteur et doit être dégazée afin d'éviter la présence de bulles. Le traitement de surface appliqué à l'aluminium est un simple dégraissage à l'isopropanol. L'application de la couche de la colle doit se faire après un certain temps afin de permettre au mélange époxy d'augmenter sa viscosité et ainsi éviter les fuites. Ensuite, l'échantillon est placé à température ambiante afin de permettre à la réticulation de passer le point de gel. Puis, l'ensemble est passé sous étuve pendant 3h à 160°C. Afin de générer des modes de Lamb, un transducteur émetteur de 2.25 MHz est placé sur un sabot de 30° et le récepteur est un vibromètre laser permettant de récupérer les déplacements normaux à la surface du bicouche. Une FFT2D (temporelle et spatiale) est ensuite appliquée et permet d'obtenir les courbes de dispersion expérimentales (Figure 9). Les courbes de dispersion théoriques des ondes de Lamb dans le cas d'une adhésion parfaite sont superposées en rouge. En jaune sont tracées les courbes de dispersion pour une valeur logarithmique des raideurs des ressorts égale à 14.5. Il a été montré qu'un simple dégraissage comme traitement de surface n'est pas le plus favorable à une bonne adhésion [10]. Les valeurs obtenues par le modèle de Jones retrouve ce résultat. C'est donc un modèle efficace pour qualifier un niveau d'adhésion.

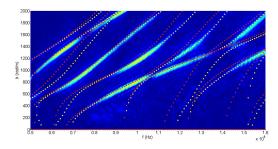


Figure 9 – Courbes de dispersion expérimentales superposées aux courbes théoriques pour $log(R_{L,T}) = 16$ (rouge) et $log(R_{L,T}) = 14.5$ (jaune).

6 Conclusion

Ceci est un travail amont à la qualification d'un niveau d'adhésion par ondes de Lamb dans une structure bicouche aluminium avec revêtement époxy à l'aide du modèle de Jones. On utilise conjointement deux méthodes, l'une analytique permettant le suivi d'un mode de propagation et l'autre basée sur la modélisation qui nous donne l'ensemble des courbes de dispersion sous la forme de nuage de points pour un temps de calcul relativement court. Après avoir tracé les courbes de dispersion dans le cas d'un collage parfait, le modèle de Jones a été présenté. Une étude de

sensibilité a été réalisée et a permis de mettre en évidence les modes sensibles aux paramètres de Jones. Enfin, une étude expérimentale a permis de conclure sur la capacité de ce modèle à évaluer un niveau d'adhésion.

Remerciements

Ces travaux ont été financés par le projet ANR ISABEAU (projet ANR 12-BS-09-0022-01).

Références

- [1] Alice Baudot. Etude et mise au point de méthodes de mesures non destructives permettant de caractériser les paramètres critiques de l'adhésion sur structures collées. PhD thesis, 2015.
- [2] Camille Gauthier, Damien Leduc, Jocelyne Galy, Mounsif Echherif Elkettani, and Jean-Louis Izbicki. Discrimination of Epoxy Curing by High Lamb Modes Order. *Physics Procedia*, 70:300–304, 2015.
- [3] J Laperre and W Thys. Experimental and theoretical study of elastic wave dispersion in a liquid bilayer. *The Journal of the Acoustical Society of \ldots*, 2, 1992.
- [4] Dale Jiao and Joseph L. Rose. An ultrasonic interface layer model for bond evaluation. *Journal of Adhesion Science and Technology*, 5(8):631–646, January 1991.
- [5] A. Baltazar, L. Wang, B. Xie, and S. I. Rokhlin. Inverse ultrasonic determination of imperfect interfaces and bulk properties of a layer between two solids. *The Journal of the Acoustical Society of America*, 114(3):1424–1434, September 2003.
- [6] S De Barros. *Modèle d'interface pour la simulation du comportement des assemblages collés*. PhD thesis, 2005.
- [7] N.A. Ismaili, D. Chenouni, Z. Lakhliai, M.E.-C. El-Kettani, B. Morvan, and J.-l. Izbicki. Determination of epoxy film parameters in a three-layer metal/adhesive/metal structure. *IEEE Transactions on Ultrasonics, Ferroelectrics, and Frequency Control*, 56(9):1955–1959, September 2009.
- [8] J. P. Jones and J. S. Whittier. Waves at a Flexibly Bonded Interface. *J. Appl. Mech*, 34(4):905–909, December 1967.
- [9] V Vlasie and M Rousseau. Acoustical validation of the rheological models for a structural bond. *Wave motion*, 2003
- [10] Jocelyne Galy, Noëllie Ylla, Joseph Moysan, and Abderrahim El Mahi. Evaluation of the Level of Adhesion in Epoxy-aluminum Joints Combining Mechanical and NDT Measurements, 2015.

Annexe

Les matrices M_L et M_T sont présentées ici. La non présence d'indice ou l'indice a représente la couche d'aluminium, l'indice c représente la couche de colle :

11-15 avril 2016, Le Mans CFA 2016 / VISHNO

• u et $u_c = \omega h_{a,c}/c_{T_a}$, avec ω la pulsation, $h_{a,c}$ l'épaisseur de la couche correspondante et c_{T_a} , la vitesse transversale dans l'aluminium.

- x_l, x_{l_c} les deuxièmes composantes adimensionnées du vecteur d'onde longitudinale dans la couche d'aluminium et de colle.
- x_t, x_{t_c} les deuxièmes composantes adimensionnées du vecteur d'onde transversale dans la couche d'aluminium et de colle.
- rh rapport entre les deux épaisseurs de chaque couche.
- μ et μ_c les coefficients de Lamé respectivement de l'aluminium et de la colle.

$$M_{L} = \begin{pmatrix} -u_{c}^{2} \cos(x_{l_{c}}) & u_{c}^{2} \sin(x_{l_{c}}) & 0 & 0 \\ -x_{l_{c}} \sin(x_{l_{c}}) & x_{l_{c}} \cos(x_{l_{c}}) & -x_{l}rh \sin(x_{l}) - \cos(x_{l})u^{2}rh^{2} \frac{\mu}{R_{L}} & -x_{l}rh \cos(x_{l}) + \sin(x_{l})u^{2}rh^{2} \frac{\mu}{R_{L}} \\ -x_{l_{c}} \sin(x_{l_{c}}) - \cos(x_{l_{c}})u_{c}^{2} \frac{\mu_{c}}{R_{L}} & x_{l_{c}} \cos(x_{l_{c}}) - \sin(x_{l_{c}})u_{c}^{2} \frac{\mu_{c}}{R_{L}} & -x_{l}rh \sin(x_{l}) & -x_{l}rh \cos(x_{l}) \\ 0 & 0 & -u^{2} \cos(x_{l}) & -u^{2} \sin(x_{l}) \end{pmatrix}$$

$$M_{T} = \begin{pmatrix} -u_{c}^{2} \sin(x_{t_{c}}) & u_{c}^{2} \cos(x_{t_{c}}) & 0 & 0 \\ -x_{t_{c}} \cos(x_{t_{c}}) & x_{t_{c}} \sin(x_{t_{c}}) & x_{t}rh\cos(x_{t}) - \sin(x_{t})u^{2}rh^{2}\frac{\mu}{R_{T}} & x_{t}\sin(x_{t})rh + \cos(x_{t})u^{2}rh^{2}\frac{\mu}{R_{T}} \\ -x_{t_{c}}\cos(x_{t_{c}}) + \sin(x_{t_{c}})u_{c}^{2}\frac{\mu_{c}}{R_{T}} & x_{t_{c}}\sin(x_{t_{c}}) + \cos(x_{t_{c}})u_{c}^{2}\frac{\mu_{c}}{R_{T}} & x_{t}rh\cos(x_{t}) & x_{t}rh\sin(x_{t}) \\ 0 & u^{2} * \sin(x_{t}) & u^{2}\cos(x_{t}) \end{pmatrix}$$

$$(7)$$